Keine Ahnung von Parabeln

Was sind Parabelgleichungen?

Wie zeichne ich eine Parabel?

Wie berechne ich den Parabelscheitel?

Datei Nr. 18015

Stand 13. August 2024

Neue Version

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK UND STUDIUM

https://mathe-cd.de

Inhalt

1 Lage von Parabeln

Der Graph einer quadratischen Funktion heißt Parabel.

Ihre Gleichung sieht allgemein so aus: $y = ax^2 + bx + c$ mit $a \neq 0$

Das lernen wir hier:

Für spezielle Werte von a, b oder c erhält man eine besondere Lage im Achsenkreuz.

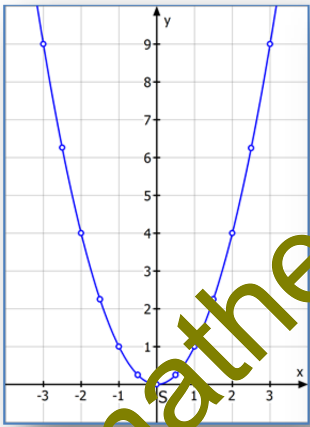
(1) Ist a = 1 oder a = -1, dann nennt man die Parabel eine **Normalparabel**.

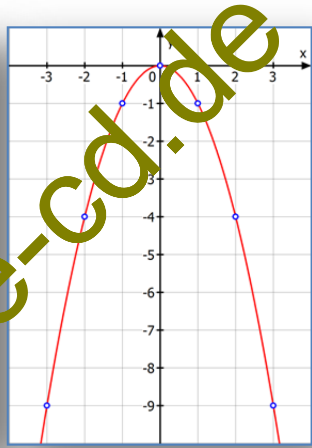
Die einfachste Gleichung ist $y = x^2$.

Diese Wertetafel liefert die linke Zeichnung:

x	0	$\pm\frac{1}{2}$	± 1	$\pm\frac{3}{2}$	± 2	$\pm\frac{5}{2}$	± 3
y	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$	4	$\frac{25}{4} = 6\frac{1}{4}$	9

Diese Tafel sollte man auswendig lernen!



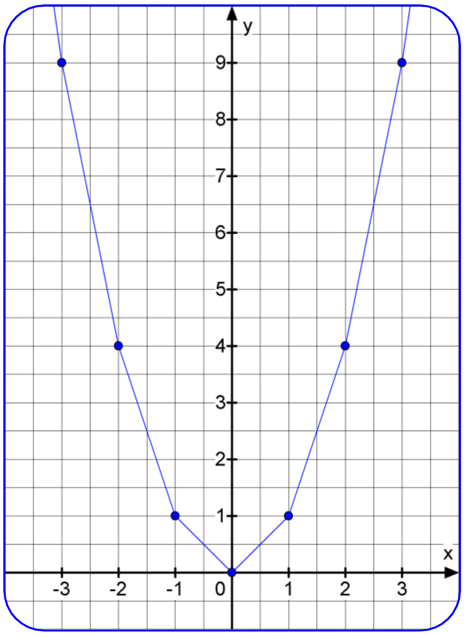


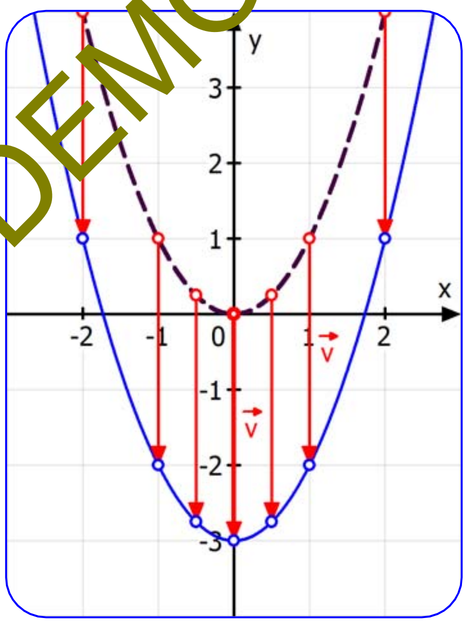
Weil durch das Quadrieren positive und negative Zahlen denselben y-Wert bekommen, ist diese Parabel **symmetrisch zur y-Achse**, sie ist die **Parabelachse**.

Der Ursprung ist der tiefste Punkt, der **Parabelscheitel**.

Die rechte Abbildung zeigt die Parabel $y = -x^2$. Sie entsteht durch Spiegelung an der x-Achse.

Die rechte Darstellung zeigt, wie man eine Parabel nicht zeichnen soll. Beim Scheitel ist sie rund und nicht spitz. Das vermeidet man, wenn man dicht beim Scheitel zwei Zwischenpunkte einfügt: $\left(\frac{1}{2} \mid \frac{1}{4}\right)$ und $\left(-\frac{1}{2} \mid \frac{1}{4}\right)$, wie dies oben bei der linken Parabel geschehen ist und unten.



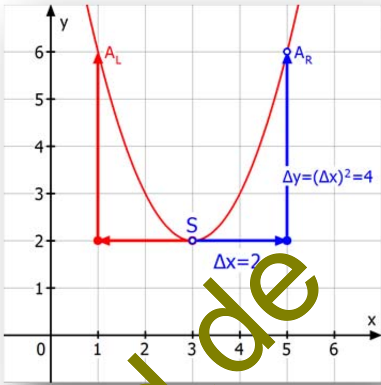


Links:

So zeichnet man die um 3 nach unten verschobene Parabel

$y = x^2 - 3$

(2) Für verschobene Parabeln, deren Scheitel also nicht im Ursprung liegt, sondern zum Beispiel in $S(3|2)$, muss man mit <u>Verschiebungsstrecken</u> arbeiten. Ausführliche Erklärung dazu:



Für eine nach oben geöffnete Normalparabel gilt: $\boxed{\Delta y = \Delta x^2}$

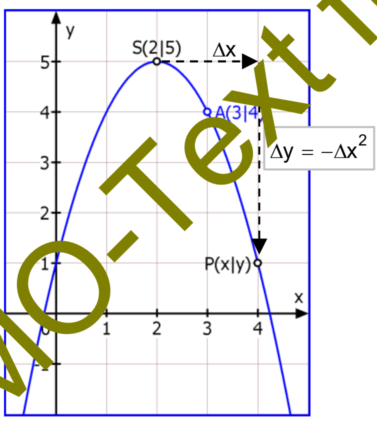
Nebenstehende Abbildung zeigt eine Normalparabel mit dem Scheitel $S(3|2)$. Den Parabelpunkt $A_R(5|6)$ erreicht man von $S(3|2)$ aus, indem man um die Strecke $\Delta x = 5-3 = 2$ in x-Richtung geht, und (weil die Parabel nach oben geöffnet ist) um die Strecke $\Delta y = \Delta x^2 = 4$ nach oben.

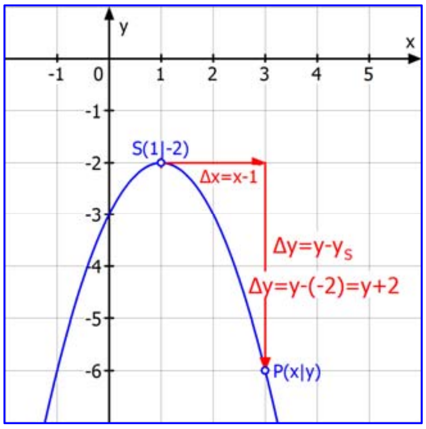
Wenn man dagegen den Punkt $A_L(1|6)$ betrachtet, dann wird bei gleichem Vorgehen Δx negativ. Es ist daher günstiger, diese Differenzen für Δx und Δy immer mit einem Betrag zu berechnen, so dass sie immer positiv sind. Also gilt für A_L: $\Delta x = |1-3| = |-2| = 2$.

Geht man also vom Scheitel aus um Δx nach <u>rechts</u>, so berechnet man diesen Punkt durch $x = x_S + \Delta x$ und wenn er <u>links</u> liegt durch $x = x_S - \Delta x$. Dabei muss Δx stets positiv sein.

Aus $\Delta y = (\Delta x)^2$ folgt die Gleichung $y - y_S = (x - x_S)^2$ mit dem Scheitel $S(x_S | y_S)$

Für eine nach unten geöffnete Normalparabel gilt: $\boxed{\Delta y = -\Delta x^2}$





$$\boxed{\begin{aligned}\Delta x &= |x-2| \\ \Delta y &= y-5\end{aligned}}$$

Eingesetzt in $\Delta y = -\Delta x^2$:

$$\boxed{y-5 = -(x-2)^2}$$

Scheitelform

bzw. $\boxed{y = -(x-2)^2 + 5}$

$$y = -(x^2 - 4x + 4) + 5$$

Normalform: $y = -x^2 + 4x + 1$

$$\boxed{\begin{aligned}\Delta x &= |x-1| \\ \Delta y &= y-(-2) = y+2\end{aligned}}$$

Eingesetzt in $\Delta y = -\Delta x^2$:

$$\boxed{y+2 = -(x-1)^2}$$

Scheitelform

bzw. $\boxed{y = -(x-1)^2 - 2}$

$$y = -(x^2 - 2x + 1) - 2$$

$y = -x^2 + 2x - 3$

(3) Zeichnung von Punkten von verschobenen Normalparabeln

Ausgehend vom Scheitel $S(3\,|\,2)$ wähle ich Δx als Verschiebungsstrecke: Z. B.:

Für $\Delta x = 2$:	Nach rechts wird addiert:	$x_A = x_S + \Delta x = 3 + 2 = 5$,	$A(5\,|\,6)$
	Nach oben wird addiert:	$y_A = y_S + \Delta x^2 = 2 + 4 = 6$	
Für $\Delta x = 2{,}5$	Nach links wird subtrahiert:	$x_B = x_S - \Delta x = 3 - 2{,}5 = 0{,}5$	$B(0{,}5\,|\,8{,}25)$
	Nach oben wird addiert:	$y_B = y_S + \Delta x^2 = 2 + 6{,}25 = 8{,}25$	

Dazu kann man **diese Wertetafel verwenden:**

Δx	0	$\pm\frac{1}{2}$	± 1	$\pm\frac{3}{2}$	± 2	$\pm\frac{5}{2}$	± 3
Δy	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$	4	$\frac{25}{4} = 6\frac{1}{4}$	9

Man kann die Gleichung dazu so berechnen:

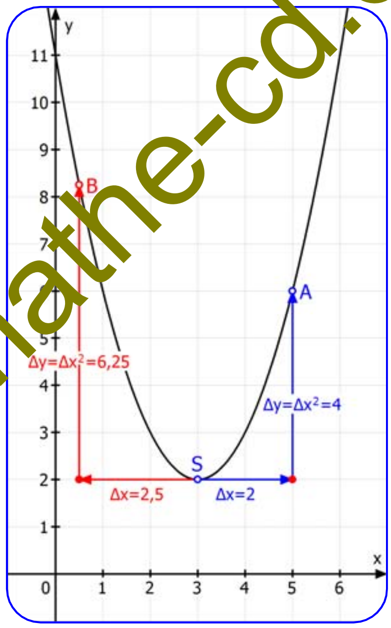
$\Delta y = \Delta x^2$ **d. h.** $y - y_S = (x - x_S)^2$

Mit $S(3\,|\,2)$ ergibt das $\quad y - 2 = (x-3)^2$.

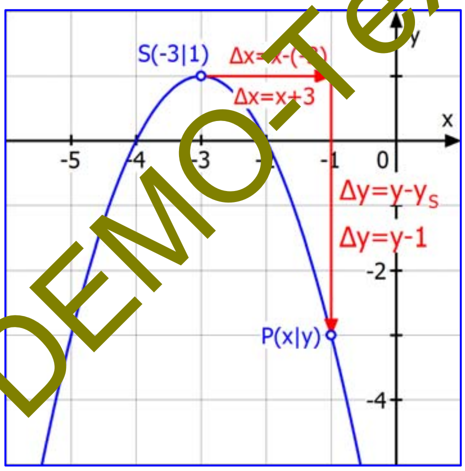
Das ist die Scheitelgleichung der Parabel.

Durch Ausmultiplizieren wird daraus:

$\mathbf{y = x^2 - 6x + 11}$ Das ist ihre Normalform.



Die nächsten Beispiele sind nach unten geöffnete, verschobene Normalparabeln mit dem Scheitel $S(-3\,|\,1)$ und $S(-2\,|\,3)$

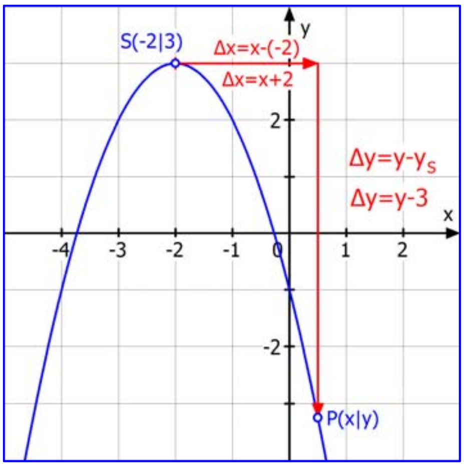


Für $\Delta x = 2$ und $\Delta y = \Delta x^2 = 4$ entsteht

der Punkt $P(-3+2\,|\,1-4) = (1\,|\,-3)$

Parabelgleichung: $\underbrace{\boxed{y - 1 = -(x+3)^2}}_{\text{Scheitelform}}$

Normalform: $y = -x^2 + 6x - 8$



Für $\Delta x = 2{,}5$ und $\Delta y = 6{,}25$ entsteht

$P(-2+2{,}5\,|\,3-6{,}25) = (0{,}5\,|\,-3{,}25)$

Parabelgleichung: $\underbrace{\boxed{y - 3 = -(x+2)^2}}_{\text{Scheitelform}}$

Notmalform: $y = -x^2 + 4x - 1$

(4) Aus einer Scheitelgleichung kann man den Scheitel ablesen:

	1. Art		2. . Art
Beispiel 1:	$y-2=(x-1)^2$	bzw.	$y=(x-1)^2+2$
Scheitel:	$y_S=+2$, $x_S=+1$		$x_S=+1$, $y_S=+2$

Umwandlung in die Normalform durch Anwenden der binomischen Formel:
$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2 \quad\Rightarrow\quad y=\left(x^2-2x+1\right)+2$ ergibt: $y=x^2-2x+3$

Beispiel 2:	$y+2=(x-3)^2$	bzw.	$y=(x-3)^2-2$
Scheitel:	$y_S=-2$, $x_S=+3$		$x_S=+3$, $y_S=-2$

Normalform der Parabelgleichung: $y=x^2-6x+7$

Beispiel 3:	$y-2=-(x+1)^2$	bzw.	$y=-(x+1)^2+2$
Scheitel:	$y_S=+2$, $x_S=-1$		$x_S=-1$, $y_S=+2$

Normalform der Parabelgleichung: $y=-x^2-2x+1$

Beispiel 4:	$y-4=-(x+2)^2$	bzw.	$y=-(x+2)^2+4$
Scheitel:	$y_S=4$, $x_S=-2$		$x_S=-2$, $y_S=4$

Normalform der Parabelgleichung: $y=-x^2-4x$

In den Parabelgleichungen der ersten Art stehen die Scheitelkoordinaten links bzw. rechts mit **dem jeweils umgekehrten Vorzeichen**.
Stellt man die Parabelgleichung nach y um (2. Art), dann stehen beide Scheitelkoordinaten rechts. Dann zeigt die x-Koordinate des Scheitels noch immer das entgegengesetzte Vorzeichen, während die y-Koordinate des Scheitels das richtige Vorzeichen zeigt.
Beide Gleichungen sind im Gebrauch. Man nennt sie **Scheitelgleichung** einer Parabel.

$$\boxed{y-y_S=a\left(x-x_S\right)^2} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{y=\left(x-x_S\right)^2+y_S}$$

e) Aufgabe:

Stelle die Scheitelgleichung und die Normalform der nach unten geöffneten Normalparabeln auf, die folgende Scheitel haben: $S_1(-2\,|\,2)$, $S_2(0\,|\,4)$, $S_3(-3\,|\,0)$, $S_4(2\,|\,-2)$

Das Ergebnis folgt auf der nächsten Seite.

Lösung zu e):

$S_1(-2\,|\,2)$: $\Delta y = -(\Delta x)^2 \;\Leftrightarrow\; y-2=-(x-(-2))^2 \;\Leftrightarrow\; y-2=-(x+2)^2$ Scheitelform.

Umrechnung in Normalform: $y-2=-(x^2+4x+4) \Leftrightarrow y=-x^2-4x-2$

$S_2(0\,|\,4)$: $\Delta y = -(\Delta x)^2 \;\Leftrightarrow\; y-4=-(x-0)^2 \;\Leftrightarrow\; y=-x^2+4$ *)

$S_3(-3\,|\,0)$: $\Delta y = -(\Delta x)^2 \;\Leftrightarrow\; y-0=-(x-(-3))^2 \;\Leftrightarrow\; y=-(x+3)^2$ Scheitelform.

Umrechnung in Normalform: $y=-x^2-6x-9$

$S_4(2\,|\,-2)$: $\Delta y = -(\Delta x)^2 \;\Leftrightarrow\; (y-(-2))=-(x-2)^2 \Leftrightarrow y+2=-(x-2)^2$ Scheitelform.

Umrechnung in Normalform: $y+2=-(x^2-4x+4) \;\Leftrightarrow\; y=-x^2+4x-6$

*) Liegt der Parabelscheitel auf der y-Achse: $S(0\,|\,y_S)$, dann lautet die Normalform: $y=y_S\pm x^2$ mit + oder – je nachdem, wohin sie geöffnet ist.

Und hier die vier zugehörigen Parabeln: